

מבחן טרימסטר א' במתמטיקה

משך המבחן 3 שעות. יש לפתור את **25** השאלות!

אין להשתמש במחשבוני! אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!
 סעיפים שונים באותה שאלה שווים בניקודם עד כדי נקודה, אלא אם רשום אחרת!
ככל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן!
כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות – חייבת הוכחה!

שאלה 1 - 16%

6% א. פתור: $\frac{\sqrt{1-2x+x^2}+x}{x} > 0$.

10% ב. עבור אילו ערכים של m יש למשוואה $(m+2)x^2 + 2(m-1)|x| + m^2 - 1 = 0$ רק שני פתרונות ממשיים שונים והם קטנים מ-2?

שאלה 2 - 18%

10% א. צייר במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות: $y = (x+2) \cdot |x-2|$, $y = \frac{x+2}{x-2}$.

8% ב. פתור: $(x+2) \cdot |x-2| > \frac{x+2}{x-2}$.

שאלה 3 - 22%

10% א. פתור: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2x+4} > 0$.

2% ב. עבור אילו ערכים של a מתקיים $\log_a 2 < 0$?

10% 2 פתור: $\frac{\log_{0.5}(\sqrt{x+3}-1)}{\log_{0.5}(\sqrt{x+3}+5)} < \frac{1}{2}$.

שאלה 4 - 12%

פתור: $\left(3 \cdot \left(3^{x^2+3} \right)^{\frac{1}{2x^2}} \right)^{\frac{2}{x^2-1}} > \frac{3}{\sqrt[10]{3}}$.

יש לפתור את השאלות הבאות רק באמצעות גיאומטריה-המישור.
כל משפט בגיאומטריה המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה!
תזכורת! – חובה לשרטט בעזרת סרגל ומחוגה ולא ביד חופשית!

שאלה 5 - 16%

10% א. אורכי שתיים מצלעות המשולש הם 1 ו- $\sqrt{15}$. אורך התיכון לצלע השלישית הוא 2 .

הוכח כי המשולש הוא ישר-זווית. רמז: המשך את התיכון כאורכו.

6% ב. אם מנקודה T מעבירים חותך למעגל (נקודות החיתוך A, B כך $TA < TB$) ומשיק TC למעגל (C על המעגל), הוכח כי $TC^2 = TA \cdot TB$.

שאלה 6 - 16%

8% א. הוכח כי אם a, b, c הן צלעות המשולש ו- r הוא רדיוס המעגל החסום במשולש,

אזי שטח המשולש הוא $\frac{1}{2}r(a+b+c)$.

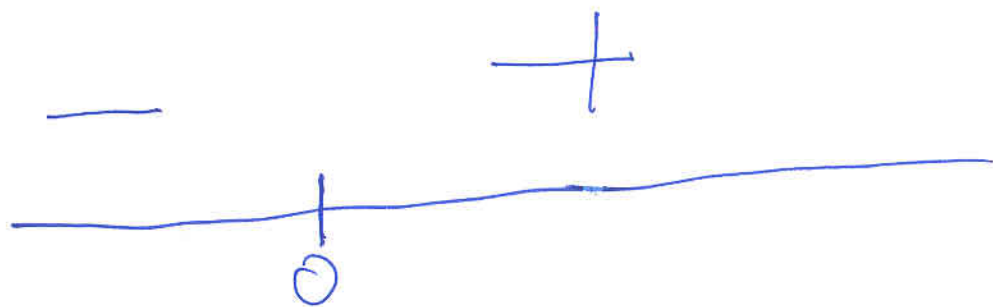
8% ב. במשולש ABC שבו $AB:AC:BC = 5:4:3$ חסום מעגל המשיק לצלעות המשולש בנקודות K, M, N

בהצלחה!

הוכח כי $CK:AK = 1:3$. ($K \in AC, M \in BC, N \in AB$)

(k)

$$\frac{\sqrt{1-2x+x^2} + x}{x} > 0$$



$$x > 0$$

$$x \neq 0$$

after 1

$$1-2x+x^2 \geq 0$$

$$(x-1)^2 \geq 0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{1-2x+x^2} = -x$$

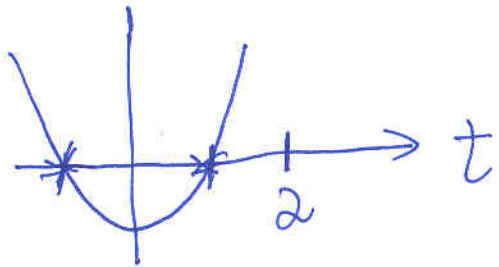
$$1-2x+x^2 = x^2$$

$$1 = 2x$$

$$\frac{1}{2} = x$$

GAN

② $|x|=t$ $(m+2)t^2 + 2(m-1)t + m^2 - 1 = 0$



$$t^2 + \frac{2(m-1)}{m+2}t + \frac{m^2-1}{m+2}$$

$$F(2) > 0 \Rightarrow -4-\sqrt{3} < m < -2, m > -4+\sqrt{3}$$

$$F(0) < 0 \Rightarrow m < -2, -1 < m < 1$$

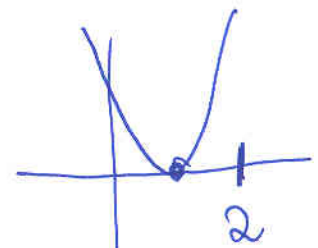


$$\begin{aligned} -4+\sqrt{3} &< m < 1 \\ -4-\sqrt{3} &< m < -2 \end{aligned}$$

∴ '2' 0 pers 2/0

$$\begin{aligned} -4+\sqrt{3} &< m < 1 \\ -4-\sqrt{3} &< m \leq -2 \end{aligned}$$

in note



$$\Delta = 0$$

(m-1)(m^2+2m+3)

⇓

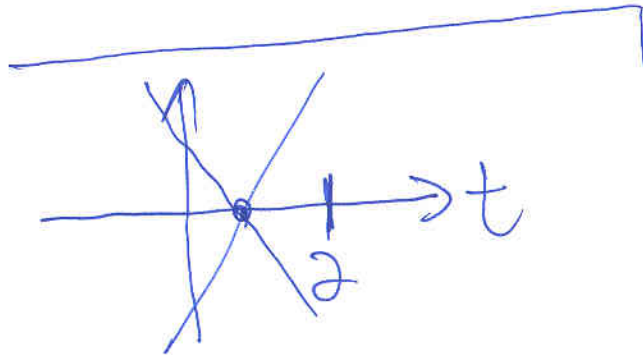
$$m = 1$$

$$3t^2 = 0$$

$$t = 0$$

$$\emptyset$$

$$q \text{ ksh } \emptyset$$



$$a=0$$

$$m = -2$$

2/3 k
q/32A1

$$3-6t=0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

✓

q ksh

$$y = \frac{(x+2)}{(x-2)} \quad (k)$$

$$(2,0) \quad x > 2 \Rightarrow y = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}$$

$$x \leq 2 \Rightarrow y = -\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}$$

$$y = \frac{x+2}{x-2}$$

(2)
(1)

2 n oke

$$x_A = -2$$

$$\frac{x+2}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}$$

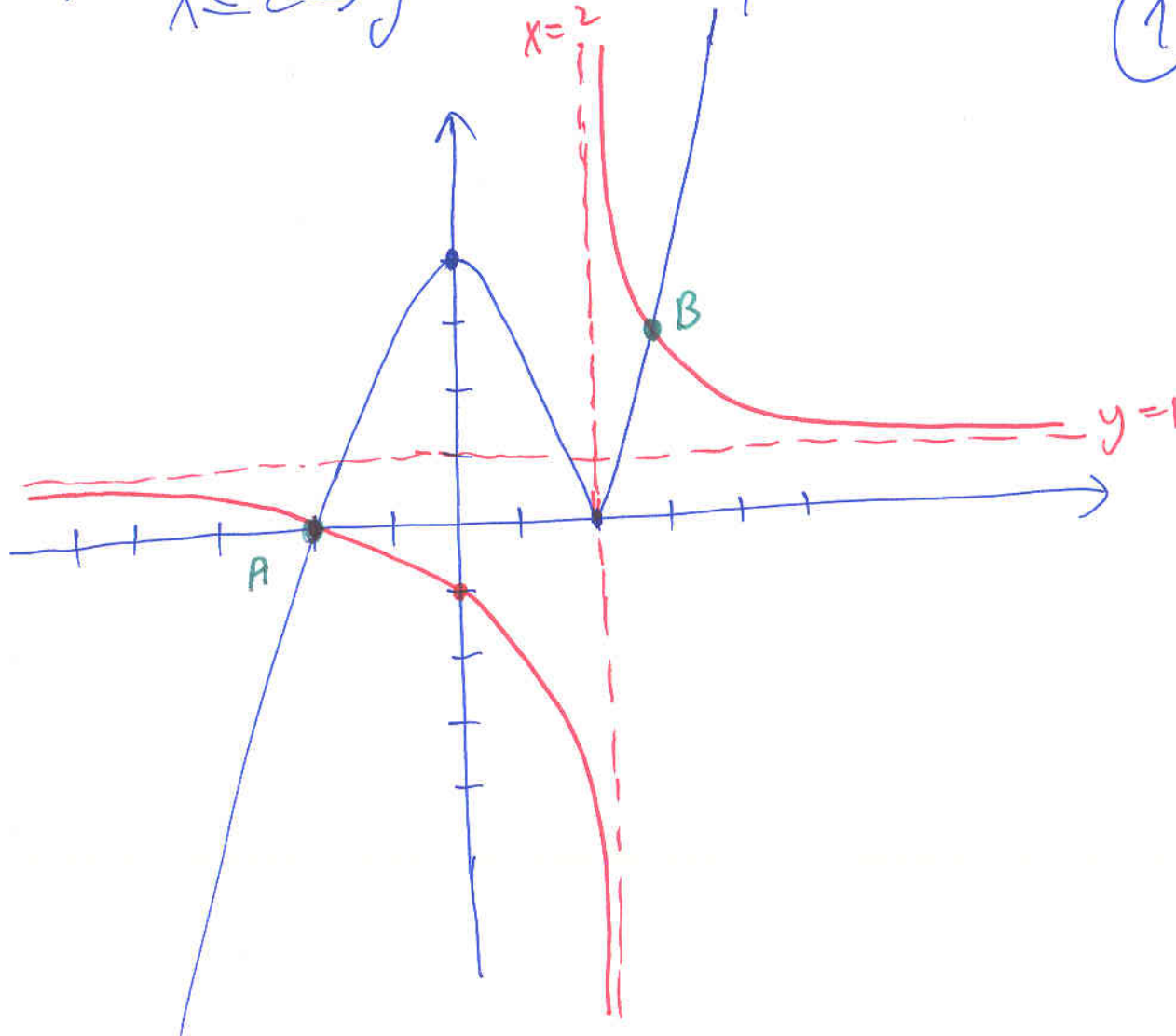
$$(x+2) = (x+2)(x-2)^2$$

$$(x+2)[(x-2)^2 - 1] = 0$$

$$(x-2)^2 = 1$$

$$x = 3$$

$$x_B = 3$$



1/c $x > 3$
 $-2 < x < 2$

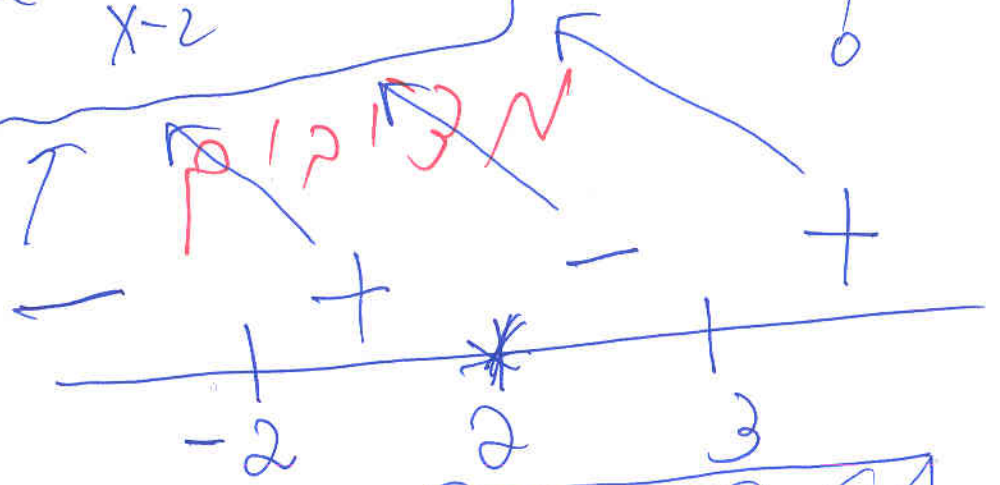
2
2

$$(x+2)|x-2| > \frac{x+2}{x-2}$$

$$(x+2) \left[|x-2| - \frac{1}{x-2} \right] > 0$$

$$\frac{(x+2)(|x-2| - 1)}{x-2} > 0$$

$x=2$
 $x \neq 2$
 $x=3$



$$\begin{aligned} &|x| > 3 \\ &-2 < x < 2 \end{aligned}$$

$$(x-2)|x-2| = 1 \quad ()^2$$

$$(x-2)^4 = 1$$

$$x-2 = 1$$

$$x-2 = -1$$

$$x = 3$$

~~$$x = 1$$~~

הי"א והי"ב
במקום ג' קי"ב
במקום א' קי"ב

$$\textcircled{k} \sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} > \sqrt{2x+4}$$

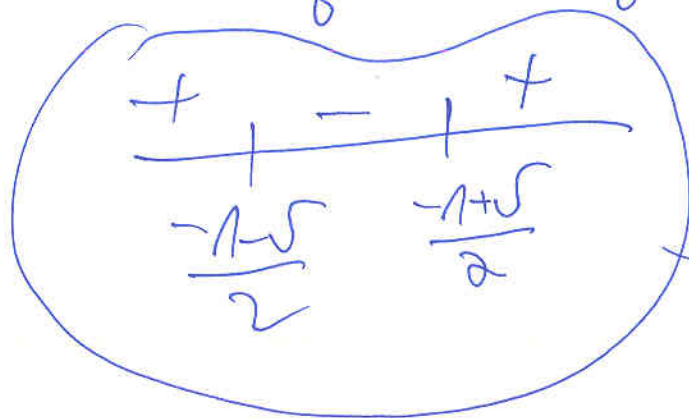
$$\cancel{x+3} + \cancel{x-2} + 2\sqrt{} > \cancel{2x+4}$$

$$2\sqrt{} > 3$$

$$4(x+3)(x-2) > 9$$

$$4x^2 + 4x - 33 > 0$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 \cdot 34}}{8} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{34}}{8} \rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{34}}{2}$$



$$\begin{aligned} x+3 &\geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \\ x-2 &\geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ 2x+4 &\geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{DfE} \\ 3 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \boxed{x \geq 2}$$

$$16 + 4 \cdot 4 \cdot 33$$

$$16(1 + 33)$$

$$16 \cdot 34$$

$$4\sqrt{34}$$

$$\boxed{x > \frac{-1 + \sqrt{34}}{2}}$$

② 1) $\log_a 2 < \log_a 1$

$$(a-1)(2-1) < 0$$

$$a-1 < 0$$

$$a < 1$$

$$\begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix}$$

3 נדבקה

$$0 < a < 1$$

$$x+3 > 0$$

$$x > -3$$

2) $\frac{\log_{0.5}(\sqrt{x+3}-1)}{\log_{0.5}(\sqrt{x+3}+5)} < \frac{1}{2}$

תמוך
1 -N

החזרה תמיד יסודי

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3}-1 > 0 &\Rightarrow \sqrt{x+3} > 1 \\ \sqrt{x+3}+5 > 0 &x \in \mathbb{R} \\ \log_{0.5}(\sqrt{x+3}+5) &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} x+3=1 \\ x=-2 \end{matrix} \notin \boxed{x > -2}$$

$$\sqrt{x+3}+5 \neq 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$2 \log_{0.5}(\sqrt{x}-1) > \log_{0.5}(\sqrt{x}+5)$$

$$\log_{0.5}(\sqrt{x}-1)^2 - \log_{0.5}(\sqrt{x}+5) > 0$$

$$\log_{0.5}\left(\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+5}\right) > \log_{0.5} 1$$

NGD
12/17

$$\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}+5} < 1$$

$$x+3+1-2\sqrt{x} < \sqrt{x}+5$$

$$x-1 < 3\sqrt{x}$$

$$x-1 < 0$$

$$x < 1$$

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

$$x^2-2x+1 < 9(x+3)$$

$$x^2-11x-26 < 0$$

+	-	+
-2	13	

$$(x-13)(x+2) < 0$$

$$-2 < x < 13$$

$$x < 13$$

$$-2 < x < 13$$

$$\left(3 \cdot 3^{(x^2+3)} \cdot \frac{1}{2x^2} \right)^{\frac{2}{x^2-1}} > \frac{3^1}{3^{\frac{1}{10}}} = 3^{\frac{9}{10}}$$

$3t^2 - 13t - 10$ $\Delta = 169 + 120 = 289$
 $3t^2 + 2t - 15t - 10$ $\Delta = 4$
 $t(3t+2) - 5(3t+2)$
 $(3t+2)(t-5)$

$$3 \frac{2}{x^2-1} + \frac{2(x^2+3)}{2x^2(x^2-1)} > 3^{\frac{9}{10}}$$

$$\frac{2}{x^2-1} + \frac{x^2+3}{x^2(x^2-1)} > \frac{9}{10}$$

$$\frac{10x^2}{x^2-1} + \frac{10}{x^2(x^2-1)} - \frac{9}{10} > 0$$

$$\frac{20x^2 + 10x^2 + 30 - 9x^2(x^2-1)}{10x^2(x^2-1)} > 0$$

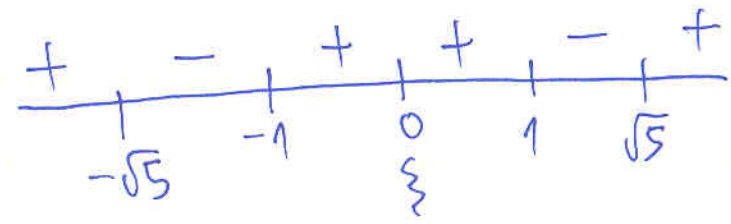
$$\frac{30x^2 + 30 - 9x^4 + 9x^2}{x^2(x-1)(x+1)} > 0$$

$$\frac{-9x^4 + 39x^2 + 30}{x^2(\quad)(\quad)} > 0$$

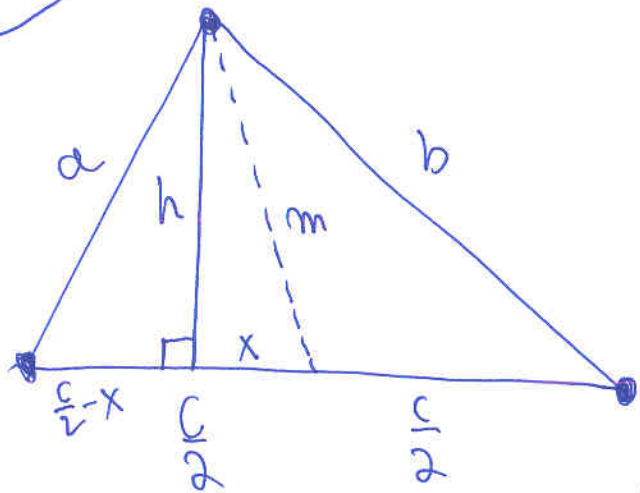
$$\frac{3x^4 - 13x^2 - 10}{x^2(\quad)(\quad)} < 0$$

$$\frac{(3x^2+2)(x^2-5)}{x^2(x-1)(x+1)} < 0$$

$1 < x < \sqrt{5}$
 $-\sqrt{5} < x < -1$



5 λδκε



$$\begin{cases} h^2 + (\frac{c}{2} - x)^2 = a^2 \\ h^2 + x^2 = m^2 \\ h^2 + (\frac{c}{2} + x)^2 = b^2 \end{cases}$$

Επιλύω λ/λ/10
 λδδδ
 2/ε/λδ
 1/λ/λ
 ε/δ/ε/λδ

$$m^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

$$+ \begin{cases} h^2 + \frac{c^2}{4} + x^2 - 2cx = a^2 \\ h^2 + \frac{c^2}{4} + x^2 + 2cx = b^2 \end{cases}$$

$$\frac{2(h^2 + x^2 + \frac{c^2}{4}) = a^2 + b^2}{2(h^2 + x^2 + \frac{c^2}{4}) = a^2 + b^2}$$

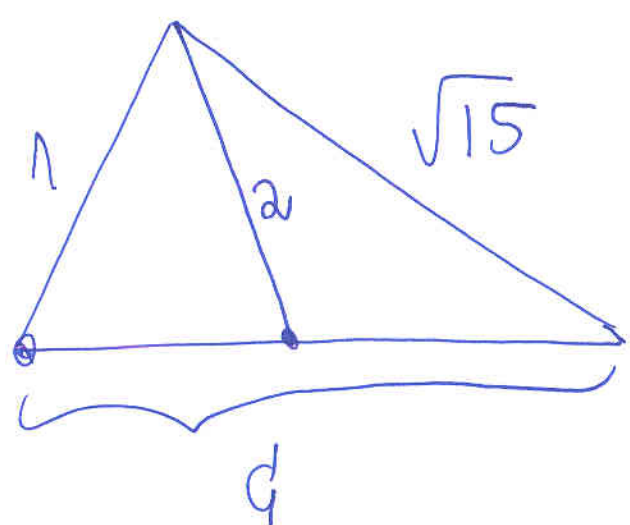
$$2(m^2 + \frac{c^2}{4}) = a^2 + b^2$$

$$2m^2 + \frac{c^2}{2} = a^2 + b^2$$

$$4m^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

$$m = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$

(c)

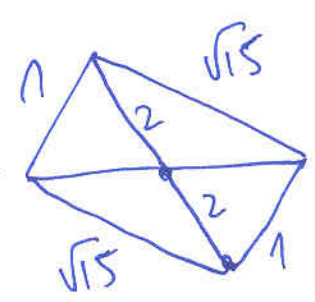


$$\Rightarrow 2^2 = \frac{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot \sqrt{15}^2 - C^2}{4}$$

$$16 = 2 + 30 - C^2$$

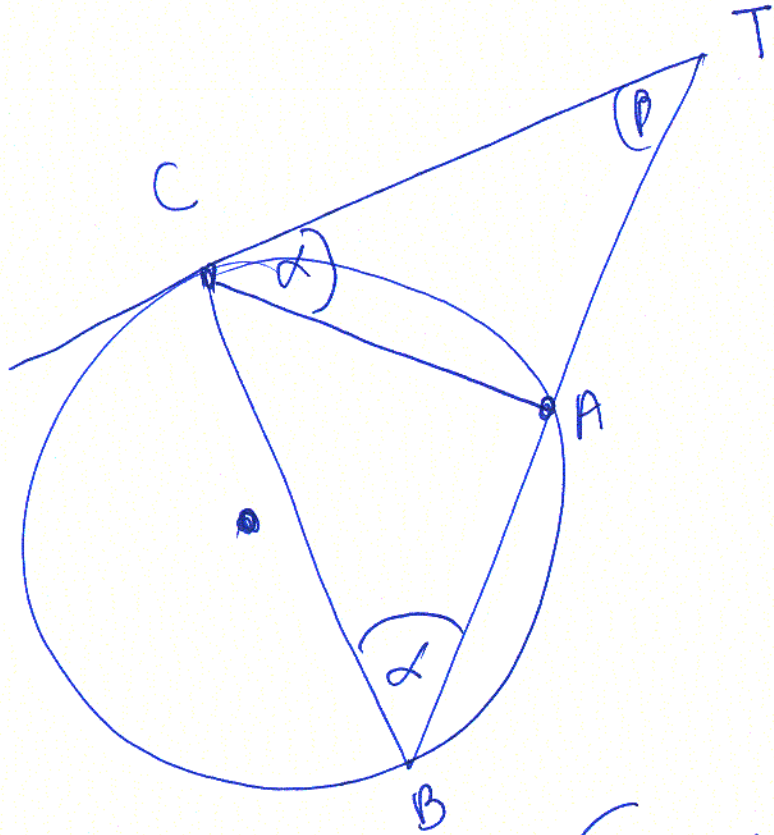
$$C = 4$$

$1^2 + (\sqrt{15})^2 \stackrel{??}{=} 4^2 \quad \checkmark \Rightarrow$ המשפט וטרקולוט
 המשפט פיתגורס



בעזרת האוויר התיכון:
 (מחוק בלתי מקבילים שהיננו אחת)

(k)



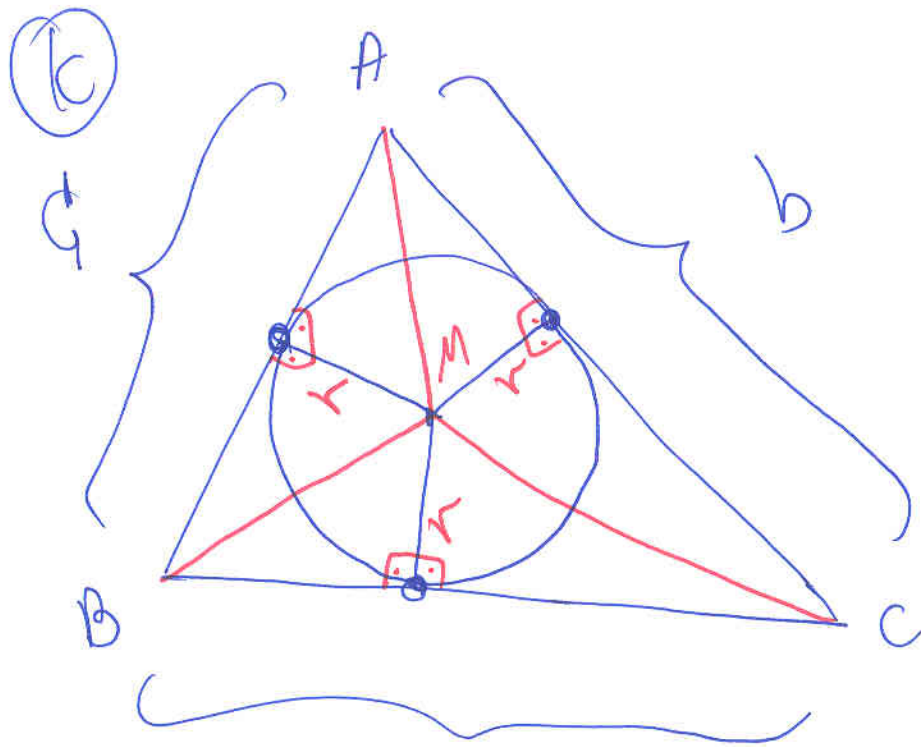
(2)

$\triangle TCA \sim \triangle TBC$ (S.S)

\Downarrow

$$\frac{TC}{TB} = \frac{CA}{BC} = \frac{TA}{TC}$$

f.c.N $\boxed{TC^2 = TA \cdot TB}$

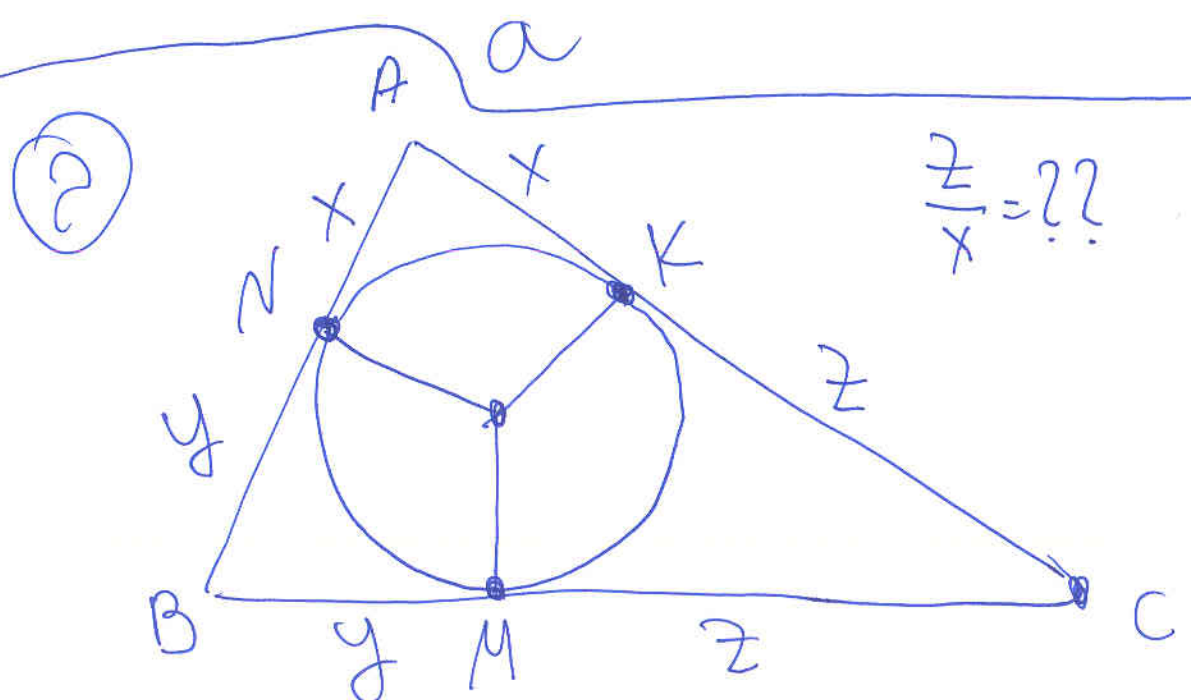


6.7.8.9

$$S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MAC} + S_{MBC}$$

$$S = \frac{r \cdot c}{2} + \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot a}{2}$$

$$S = \frac{r}{2} (a + b + c)$$



$\frac{z}{x} = ??$

$$x + y \div x + z \div y + z = 5 \div 4 \div 3$$

$$\frac{x+y}{x+z} = \frac{5}{4} \quad \frac{x+z}{y+z} = \frac{4}{3}$$

$$4x + 4y = 5x + 5z \quad 3x + 3z = 4y + 4z$$

$$4y = x + 5z \quad 3x - z = 4y$$

$$x + 5z = 3x - z$$

$$6z = 2x \Rightarrow \frac{z}{x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$